Lösungsheft

Zahlenmauern

Ostfriesische Landschaft
Regionales Pädagogisches Zentrum
-RPZ-

Aurich
März 2010

Erstellt von einem Redaktionsteam des Arbeitskreises „Kompetenz und Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht“. Mitglieder: Hans-Jürgen Chwolka, Dorothee Göckel, Silke Margner, *Mareike Neudeck,* Werner Otten, Helmut Roscher, *Hans Schmitt, Paul Zell. (Leitungsteam des AK)*

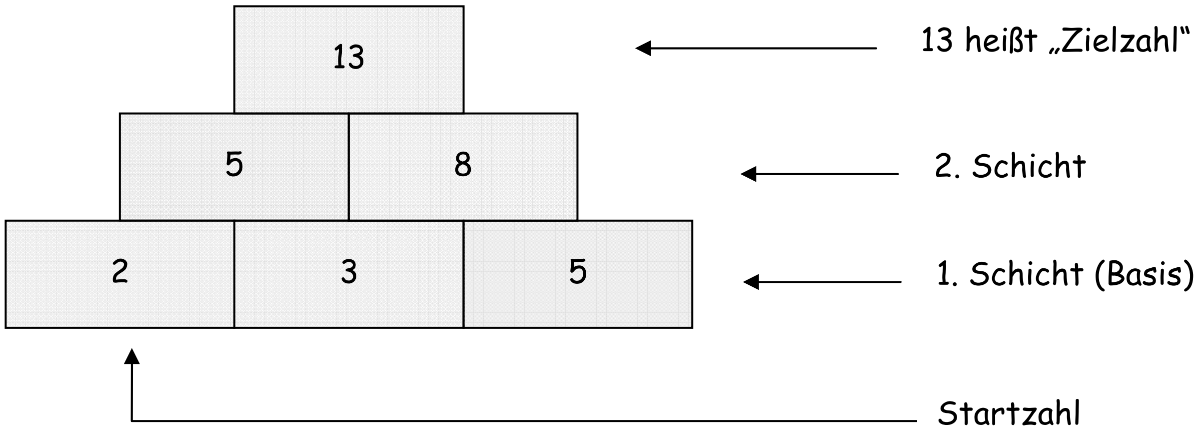
Einführung

Mauern bestehen aus Steinen. Bei einer Zahlenmauer steht jeder Stein für eine Zahl.
Später verwenden wir statt Zahlen auch „Variablen“.

Wenn nicht anders angegeben verwenden wir meist die Zahlen von 1 bis 10 oder von 1 bis 100.

Das Bauen einer Zahlenmauer erfolgt nach folgender Regel: Die Summe von zwei nebeneinander stehenden Zahlen ergibt stets die darüber liegende Zahl.

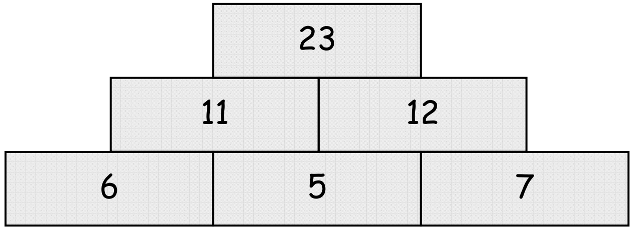
Hier ist eine Zahlenmauer abgebildet, die aus drei Schichten aufgebaut ist. Überprüfe die oben beschriebene Bauvorschrift.

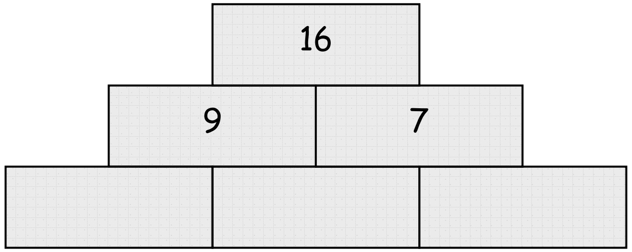


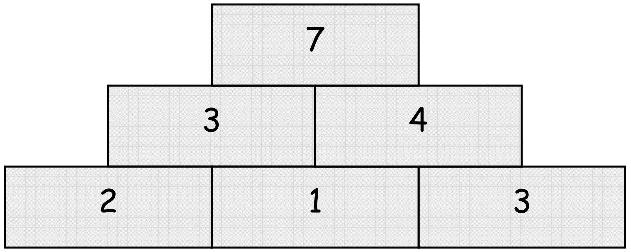
Zum Probieren, Üben und für Zusatzaufgaben findest du am Ende des Heftes leere Mauern.
Du kannst die Aufgaben allein bearbeiten oder mit einem Partner. Es ist hilfreich Beobachtungen, Überlegungen und Ergebnisse zu den Aufgaben mit jemandem zu besprechen, bevor du sie auf dem Arbeitsblatt einträgst.

Arbeitsblatt 1

Für welche Zahlen stehen die Steine, die keine Zahlen tragen?







Hier kannst du deine Überlegungen, Beobachtungen und Rechnungen aufschreiben.

Es gibt nur eine Lösung.

Für die zweite Schicht gibt es nur die Lösung 7.
Für die Basis gibt es mehrere Lösungen:

8-1-6	7-2-5	6-3-4
5-4-3	4-5-2	3-6-1

Es gibt nur eine Lösung.

Arbeitsblatt 2

Die hier abgebildeten Zahlenmauern haben alle dieselbe Zielzahl. Probiere mehrere Möglichkeiten aus, die zu dieser Zielzahl führen!

z.B.

10

2 | 8

1 | 1 | 7

z.B.

10

3 | 7

2 | 1 | 6

z.B.

10

4 | 6

3 | 1 | 5

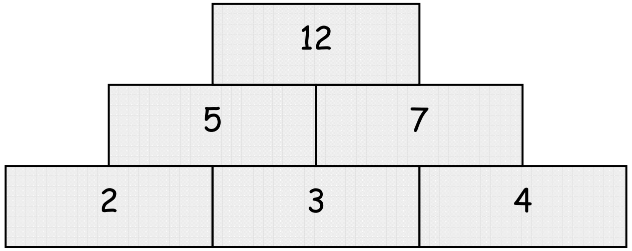
Wie bist du vorgegangen?

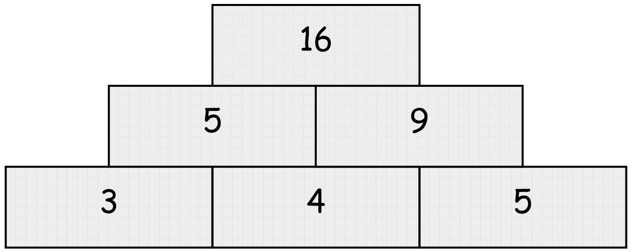
Was fällt dir auf?

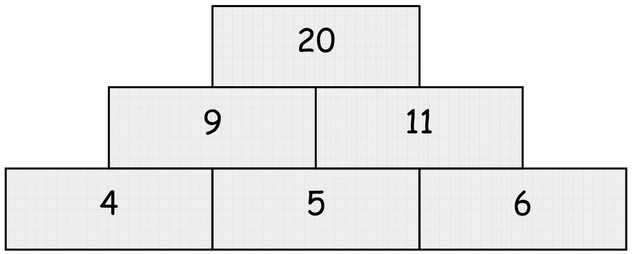
Überprüfe deine Entdeckungen, indem du andere Zielzahlen vorgibst!
(Du kannst dazu leere Mauern am Ende des Heftes verwenden.)

Arbeitsblatt 3

Das Besondere an der folgenden Zahlenmauer ist, dass die Basissteine fortlaufende Zahlen tragen.







Erfinde weitere Zahlenmauern mit dieser Bauvorschrift und untersuche, wie sich jeweils die Zielzahl verändert.

Stelle dazu deine Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.
(Du kannst dazu wieder weitere leere Mauern am Ende des Heftes verwenden.)

Start-zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ziel-zahl	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44

Beschreibe, wie sich die Zielzahl verändert, wenn sich die Startzahl um 1 vergrößert.

Die Zielzahl wächst in 4er-Schritten.

Zusatz:
Untersuche auch Mauern mit vier und fünf Schichten mit fortlaufenden Basiszahlen.

Bei 4 Schichten wächst die Zielzahl in 8er-Schritten.
→ Startzahl 2 / Zielzahl 28
Bei 5 Schichten wächst die Zielzahl in 16er-Schritten.
→ Startzahl 2 / Zielzahl 64

Arbeitsblatt 4

16
6 10
2 4 6

20
8 12
3 5 7

60
30 30
15 15 15

Die Mauern links haben unterschiedliche Bauweise:
Die Basiszahlen sind …

- …fortlaufende gerade Zahlen (2, 4, 6)
- …fortlaufende ungerade Zahlen (3, 5, 7)
- …lauter gleiche Zahlen

Welche Zielzahlen erhältst du jeweils? Was fällt dir dabei auf?
(Zum Probieren brauchst du weitere leere Mauern aus dem Anhang.)

Die Zielzahl ist in allen drei Bauweisen immer eine gerade Zahl.

Die Zielzahl ist bei der 3. Bauweise immer das Vierfache der Startzahl.

Zusatz:
Probiere weitere Möglichkeiten aus und schreibe deine Entdeckungen und Erkenntnisse auf.

Arbeitsblatt 5

Die beiden äußeren Basissteine tragen die gleiche ungerade Zahl.

z.B.

		10			
	5		5		
3		2		3	

z.B.

		16			
	8		8		
3		5		3	

z.B.

		148			
	74		74		
3		71		3	

Kann die Zielzahl ungerade sein?
Probiere dazu verschiedene Möglichkeiten für den mittleren Baustein in der Basis aus. Was fällt dir auf?

Es gibt nur gerade Zielzahlen.

Schreibe eine Begründung auf!

Bei der Addition von gleich großen Zahlen erhält man immer eine gerade Zahl.

Arbeitsblatt 6

Hier sind 10 Zahlenmauern gezeichnet:
Die Startzahlen verändern sich dabei von 1 bis 10.

3	
1	2

5	
2	3

7	
3	4

9	
4	5

11	
5	6

13	
6	7

15	
7	8

17	
8	9

19	
9	10

21	
10	11

Fülle die Zahlenmauern aus und ergänze die folgende Tabelle.

Startzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zielzahl	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Die Zielzahlen bilden eine Zahlenfolge. Sie beginnt mit 3 und endet mit 21.

Kannst du erkennen, wie in den 10 Zahlenmauern die Zielzahl aus der Startzahl entsteht? Probiere und kontrolliere!

Beispiel: Startzahl 3 → 3 + 3 + 1 = 7
Startzahl 6 → 6 + 6 + 1 = 13

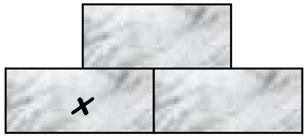
Ergebnis:

Startzahl + Startzahl + 1 = Zielzahl
oder: zweimal die Startzahl + 1 = Zielzahl
oder: 2 • Startzahl + 1 = Zielzahl

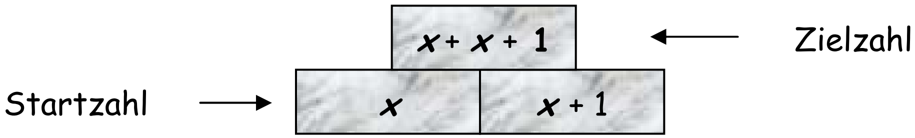
Arbeitsblatt 7

Das Ausrechnen der Zielzahlen auf Arbeitsblatt 6 ist mühsam und etwas langweilig. Das liegt daran, dass die Startzahlen *verändert* werden, aber die Rechnungen immer nach dem gleichen Muster ablaufen.

Für Zahlen, deren Wert sich *verändert*, verwenden Mathematiker zur Abkürzung Zeichen, zum Beispiel den Buchstaben x. Sie nennen x eine *„Variable"*. Damit sieht unsere Zahlenmauer so aus:



Die Variable x steht hier für die Zahlen 1 bis 10 und ist somit ein *„Zahlenspeicher"*. Das Rechenmuster in den 10 Zahlenmauern sieht dann so aus:

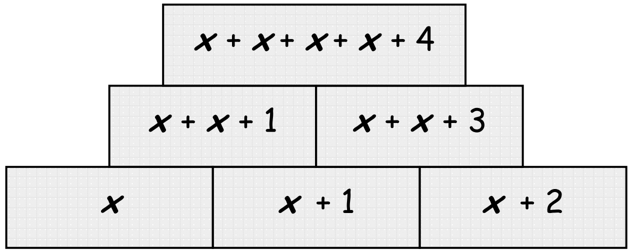


Diese Zahlenmauer steht stellvertretend für die 10 Zahlenmauern vom Arbeitsblatt 6.

Ersetze den Zahlenspeicher x durch die Zahlen 1 bis 10 und berechne die Zielzahlen. Vergleiche deine Ergebnisse mit der Tabelle von Arbeitsblatt 6.

Startzahl x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zielzahl $x + x + 1$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Die folgende Zahlenmauer hat drei Schichten. Die Variable x ist wieder ein Zahlenspeicher, z. B. für die Zahlen 1 bis 10.
Nach welchem Rechenmuster werden die Zahlen in der 2. Schicht und die Zielzahl berechnet? Verwende dazu die Variable x.
Deine Ergebnisse kannst du mit Arbeitsblatt 3 vergleichen.



Ergebnis: viermal die Startzahl + 4 = Zielzahl
oder: 4 • Startzahl + 4 = Zielzahl
oder: $4 \cdot x + 4 =$ Zielzahl

Arbeitsblatt 8

Information zum Rechnen mit der Variablen x

$x + x$

x | x

Es geht kürzer!

$2 \cdot x$

x | x

$x + x + x + x + 4$

$x + x + 1$ | $x + x + 3$

x | $x + 1$ | $x + 2$

Es geht kürzer!

$4 \cdot x + 4$

$2 \cdot x + 1$ | $2 \cdot x + 3$

x | $x + 1$ | $x + 2$

$x + x + x + x + x + x + x + x + 12$

$x + x + x + x + 4$ | $x + x + x + x + 8$

$x + x + 1$ | $x + x + 3$ | $x + x + 5$

x | $x + 1$ | $x + 2$ | $x + 3$

Es geht kürzer!

$8 \cdot x + 12$

$4 \cdot x + 4$ | $4 \cdot x + 8$

$2 \cdot x + 1$ | $2 \cdot x + 3$ | $2 \cdot x + 5$

x | $x + 1$ | $x + 2$ | $x + 3$

Arbeitsblatt 9

Die beiden äußeren Basissteine tragen die gleiche Zahl.
x ist wieder eine Variable für die Zahlen 1 bis 10.

	$x + x + 2$	
$1 + x$		$x + 1$
1	x	1

Term: $2 \cdot x + 2$

	$x + x + 2$	
$x + 1$		$1 + x$
x	1	x

Term: $2 \cdot x + 2$

	$x + x + 6$	
$3 + x$		$x + 3$
3	x	3

Term: $2 \cdot x + 6$

	$x + x + 8$	
$4 + x$		$x + 4$
4	x	4

Term: $2 \cdot x + 8$

Wenn du in den vier Zahlenmauern die Variable x durch die Zahlen 1 bis 10 ersetzt, entstehen 40 Zahlenmauern.
Begründe das!

Beantworte nun die folgenden Fragen, ohne die 40 Mauern aufzuschreiben. Kontrolliere deine Ergebnisse durch Zahlenbeispiele.

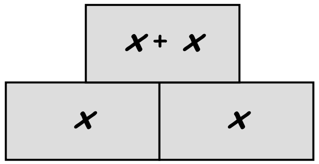
a) Nach welchem Rechenmuster entsteht jeweils die Zielzahl?
Schreibe dein Ergebnis mit der Variablen x.
Mathematiker nennen solche Rechenmuster einen *„Term"*.
<u>Beispiel:</u> Das Rechenmuster für die Zielzahl von Arbeitsblatt 7 wird mit dem „Term" $2{\cdot}x + 1$ beschrieben.

Trage die Terme links unter die Zahlenmauern ein.

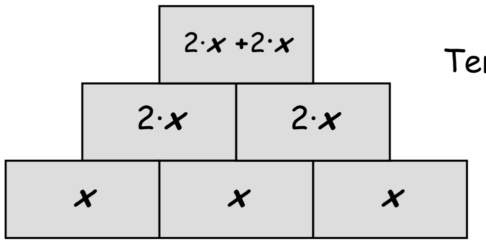
b) In der Basis können sowohl gerade als auch ungerade Zahlen vorkommen. Die Zielzahlen sind aber immer gerade.
Begründe!

Die Variable x wird mit 2 multipliziert und das ergibt immer eine gerade Zahl. Dazu wird eine gerade Zahl addiert.
Das Ergebnis ist dann immer gerade.

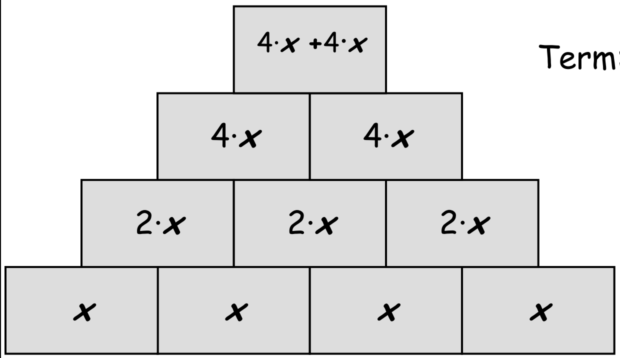
Arbeitsblatt 10
- Rechnen mit der Variablen x -



Term: $2 \cdot x$



Term: $4 \cdot x$



Term: $8 \cdot x$

Die Variable x ist nun ein Speicher für die Zahlen 1 bis 100. Wie viele Zahlenmauern lassen sich daraus auf der linken Seite bauen?

Antwort mit Begründung:

Man kann bei jeder der 3 Mauern für x hundert verschiedene Zahlen einsetzen → $3 \cdot 100$ Mauern.

Die Basisbausteine trage alle die gleiche Zahl.
Nach welchem Rechenmuster entsteht jeweils die Zielzahl?
Schreibe dein Ergebnis als Term mit der Variablen x.

Kontrolliere (benutze leere Zahlenmauern):

a) Ersetze in den gefundenen Termen x durch eine Zahl von 1 bis 100 und rechne aus.
b) Setze die gleiche Zahl für x in die entsprechende Zahlenmauer ein und bestimme die Zielzahl.
c) Vergleiche die Ergebnisse von a) und b)!

Mit dem Term lässt sich das Ergebnis viel schneller ermitteln, als wenn man Mauern für 100 verschiedene Zahlen ausfüllen würde.

Arbeitsblatt 11

Bei den Aufgaben von Arbeitsblatt 3 waren die Basiszahlen fortlaufende Zahlen. Beginnen wir mit irgendeiner Startzahl x so sieht die Mauer so aus:

$8 \cdot x + 12$

$4 \cdot x + 4$ | $4 \cdot x + 8$

$2 \cdot x + 1$ | $2 \cdot x + 3$ | $2 \cdot x + 5$

x | $x + 1$ | $x + 2$ | $x + 3$

Die Variable x soll nun ein Speicher für die Zahlen 0 bis 20 sein.
Wie viele Zahlenmauern kann man bauen, wenn x durch die Zahlen von 0 bis 20 ersetzt wird?

a) Ergänze die fehlenden Terme in der Zahlenmauer!

b) Nach welchem Rechenmuster entsteht die Zielzahl?
Schreibe dein Ergebnis als Term mit der Variablen x.

Term: $8 \cdot x + 12$

c) Fülle mit Hilfe des Terms die Tabelle aus.

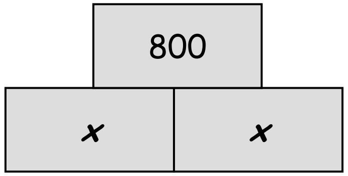
d) Die Zielzahlen ergeben eine Zahlenfolge. Beschreibe sie.

Die Zielzahl startet immer bei 12 und nimmt dann um 8 zu.
Kurz: 8-er Reihe plus 12.

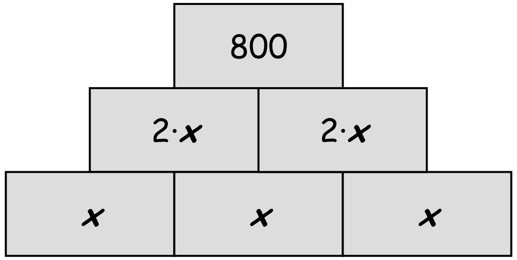
Startzahl x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Term der Zielzahl: $8 \cdot x + 12$	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172

Arbeitsblatt 12

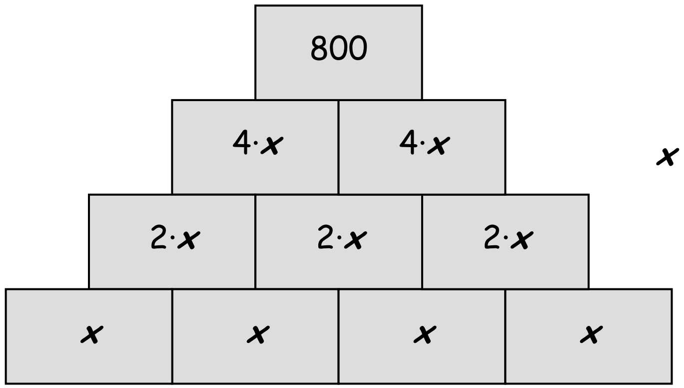
- eine unbekannte Zahl suchen -



$x = 400$



$x = 200$



$x = 100$

Links sind die Mauern vom Arbeitsblatt 10 abgebildet.
Für die Variable x sollst du nun eine Zahl suchen, damit die Zielzahl 800 ist.

a) Zum Probieren darfst du für x alle Zahlen ohne Einschränkung verwenden.

b) Überprüfe deine Lösungen mit den Termen von Arbeitsblatt 10.

Schreibe deine Überlegungen auf!

Als Term für die erste Zielzahl ergibt sich
→ $2 \cdot x = 800$, dann muss $x = 400$ sein.

Als Term für die zweite Zielzahl ergibt sich
→ $4 \cdot x = 800$, dann muss $x = 200$ sein.

Als Term für die dritte Zielzahl ergibt sich
→ $8 \cdot x = 800$, dann muss $x = 100$ sein.

Arbeitsblatt 13

	$2 \cdot x + 1$	
x		$x + 1$

	$2 \cdot x + 1$	
$x + x$		1

	$3 \cdot x + 1$	
$x + 1$		$x + x$

	$3 \cdot x + 1$	
1		$x + x + x$

	$3 \cdot x + 1$	
x		$x + x + 1$

	$4 \cdot x + 1$	
$x + x + x + 1$		x

	$4 \cdot x + 1$	
$x + x + x + x$		1

	$4 \cdot x + 1$	
$x + 1$		$3 \cdot x$

	$4 \cdot x + 1$	
$2 \cdot x + 1$		$2 \cdot x$

Bei den Zahlenmauern links sind die Terme der Zielzahl angegeben. Die erste Schicht ist unvollständig.

Ergänze die Zahlenmauern!
Finde mehrere Möglichkeiten.

Zusatz:
Wenn du Lust hast, weitere Terme zu zerlegen, verwende ein Arbeitsblatt mit leeren Zahlenmauern.

Beispiele:
$2 \cdot x + 5$ $4 \cdot x + 3$

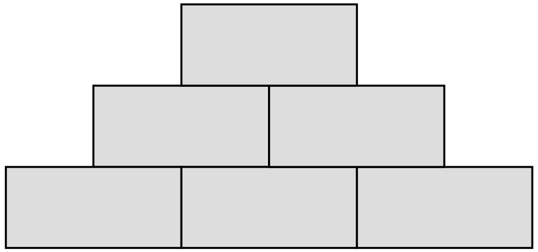
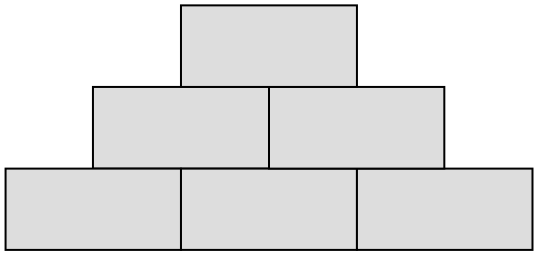
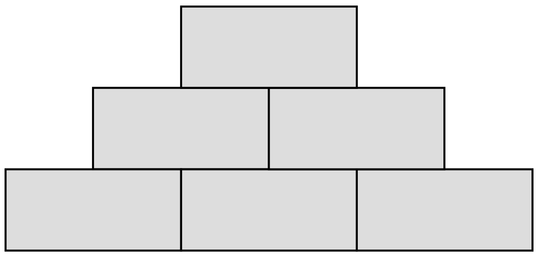
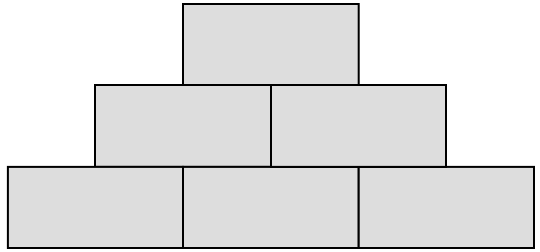
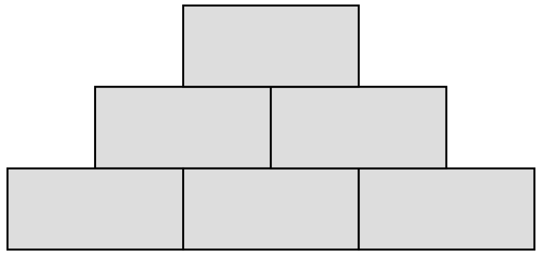
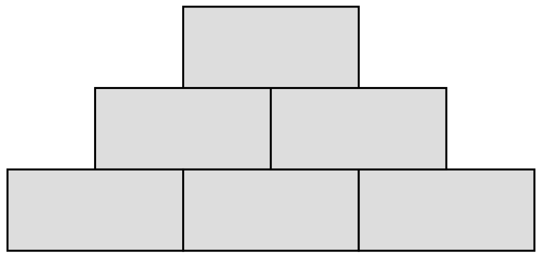
Arbeitsblatt 14

Leere Zahlenmauern

Ergänzung zu Arbeitsblatt: ____



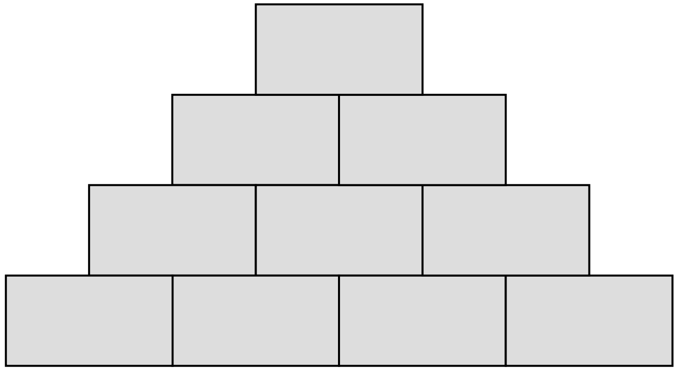


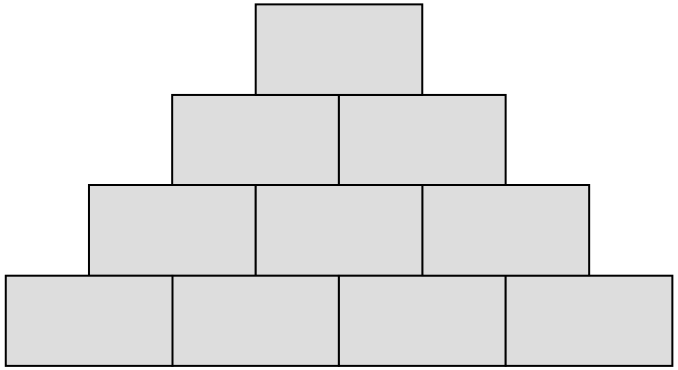








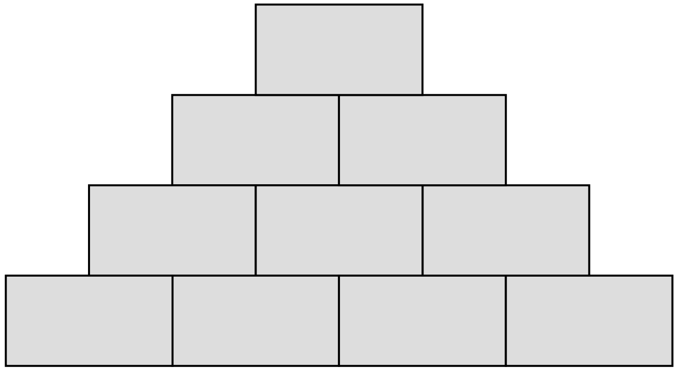
Arbeitsblatt 15

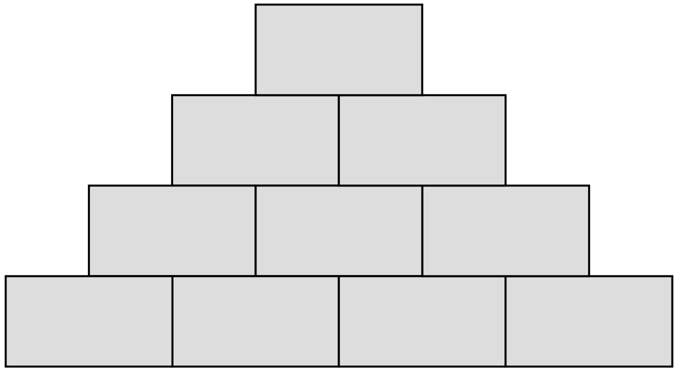
Leere Zahlenmauern

Ergänzung zu Arbeitsblatt: ____









Arbeitsblatt 16

Leere Zahlenmauern

Ergänzung zu Arbeitsblatt: ____